Z teoryi nieciągłych grup podstawień liniowych posiadających spółczynniki rzeczywiste.

Przez

S. Kępińskiego.

(Tablica II-ga).

Rzecz przedstawiona na posiedzeniu Wydz. mat.-przyr. d. 7 czerwca 1892 r.
referent czł. Zajączkowski.

Ogólną teoryę tych grup, pomijając szczególne przypadki wcześniej znane[1]) rozwinął Poincaré w rozprawie: „Sur les groupes fuchsiennes" (Acta math. t. I). Metody tam przez Poincaré'go używane są przeważnie natury geometrycznej, a stąd także określenia grup, podane w formie geometrycznej, nie prowadzą bezpośrednio do praw tworzenia spółczynników grupy. Istnieje jednak pewien dział tych grup, dla których owe prawa dadzą się arytmetycznie określić. Zasadę ogólną do tego celu prowadzącą podał znowu Poincaré w rozprawie: Les fonctions fuchsiennes et l'arithmétique" [2]), ustanawiając ścisły związek grup powyższych z grupami podstawień liniowych, należących do form potrójnych nieoznaczonych.

---

[1]) Np. grupa podstawień modułowych rozważana przez Hermite'a, Klein'a, Dedekind'a i innych; grupy określone przez Schwarz'a: Zur Theorie der Gaussischen hyp. Reihe Crell's J. t. 75. Grupy te należą do grup nazwanych ogólnie przez Kleina „automorficznemi", od funkcyi tejże nazwy, niezmieniających swej wartości przy podstawieniach grupy.

[2]) Journ. d. math. (Liouville) ser. IV. t 3. str. 405—464.

Myśli przez Poincare'go rzucone rozwinął dla szczególnych przypadków Dr. R. Fricke w pracy: „Uber eine besondere Classe discont. G. etc. (Math. Ann. t. 38, str. 50—81) — nowe zaś metody określania grup zastosował i podniósł ich znaczenie dla teoryi pewnych form podwójnych kwadratowych w dwu następnych rozprawach: „Über eine besondere Classe etc. Abh. II“ (Math. Ann. t. 38, str. 461—476) i „Weitere Untersuchungen über automorphe Gruppen etc.“ (Math. Ann. t. str. 62—112.)[1]).

Korzystając z wymienionych prac, zdołałem otrzymać grupy ogólniejsze, obejmujące jako szczególne przypadki wszystkie grupy, rozważane przez Fricke'go. Ich więc określeniem i własnościami w tej pracy się zajmuję. Okazało się jednak przytem, że dawniejsze metody, nieco zmodyfikowane, bardzo prosto prowadzą do celu, tych przeto używam; tak n. p. do określenia grupy stosowałem częścią metody Poincare'go wychodząc z grupy podstawień potrójnych, częścią postępowania Fricke'go. Kładąc zaś główny nacisk na niewymierności w grupie zachodzące uzyskałem podział podstawień na 16 typów, i bardzo prosty rozkład grupy na jej grupy częściowe. — Zaznaczę tu jednak jeszcze, że w kilku miejscach, tam gdzie zmiany wspomniane w dawniejszych metodach są bardzo nieznaczne, ograniczam się do podania wyników, opuszczając dowody i przytaczając odpowiednie miejsca w pracach wyżej wymienionych.

§. 1. Określenie grupy.

Stosownie do tego, cośmy we wstępie powiedzieli, zajmować nas będą podstawienia liniowe kształtu

$$1) \qquad \omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta},$$

w których spółczynniki α, β, γ, δ są liczbami rzeczywistemi takiemi, iż ich wyznacznik

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Według tego, czy ten wyznacznik jest równy $+1$ czy -1 nazywać będziemy podstawienia (1) podstawieniami odpowiednio 1-go lub 2-go rodzaju.

[1]) Oznaczenia w tych pracach używane starałem się tutaj zachować.

Zasługą jest, jak wspomnieliśmy, Poincaré'go, że badanie tych podstawień związał z teoryą podstawień liniowych jednorodnych, niezmieniających nieokreślonych form kwadratowych potrójnych. Związek ten możemy następującym sposobem wyprowadzić.

Przyjmijmy naprzód, że $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$. Kładąc we wzorze (1) $\omega = x + iy$ i odpowiednio $\omega' = x' + iy'$, mamy:

$$x' = \frac{\beta\delta + (\alpha\delta + \beta\gamma)x + \alpha\gamma(x^2+y^2)}{\delta^2 + 2\gamma\delta x + \gamma^2(x^2+y^2)},$$

$$y' = \frac{y}{\delta^2 + 2\gamma\delta x + \gamma^2(x^2+y^2)}.$$

Po prawej stronie mamy już wyrażenia trzechwyrazowe; aby je uczynić jednorodnemi i liniowemi przyjmujemy:

$$x = \frac{Y}{X},$$

$$x^2 + y^2 = \frac{Z}{X};$$

nadto przyjmujemy, iż

$$X'Z' - Y'^2 = XZ - Y^2 = F. \tag{2}$$

Wówczas mamy podstawienie:

$$\begin{aligned} X' &= \delta^2 X + 2\delta\gamma Y + \gamma^2 Z \\ Y' &= 2\beta\delta X + (\alpha\delta + \beta\gamma) Y + 2\alpha\gamma Z \\ Z' &= \beta^2 X + 2\alpha\beta Y + \alpha^2 Z. \end{aligned} \tag{3}$$

Podstawienia te nazwijmy Σ. Równanie (2) orzeka, że podstawienia Σ nie zmieniają formy potrójnej $F = XZ - Y^2$, co symbolicznie przedstawimy zapomocą wzoru:

$$F(\Sigma) = F. \tag{4}$$

Tym sposobem uzyskaliśmy żądany związek: Każdemu podstawieniu Σ, niezmieniającemu formy F, odpowiada jedno podstawienie liniowe (1) i nawzajem.

Odpowiedniość ta wskazuje, że do grupy podstawień liniowych Σ należeć będzie grupa podstawień (1). Grupy te jednak nie będą, wogóle mówiąc, nieciągłe, t. j. będą posiadały podstawienia nieskończenie małe. Na pewno nieciągłemi grupami są, jak wiadomo, grupy podstawień niezmieniających form potrójnych, posiadające spółczynniki całkowite i oczywiście tym grupom odpowiadające grupy podstawień (1) będą także grupami nieciągłemi. Tak n. p. grupie podstawień liniowych (3)

niezmieniających formy F i posiadających spółczynniki całkowite, odpowiada, jak łatwo spostrzedz, grupa podstawień należąca do funkcyi eliptycznych modułowych. Aby przejść do grup innych form potrójnych, postąpimy, idąc za Poincare'm, w sposób następujący:

Oznaczmy przez T podstawienie liniowe przekształcające formę F na formę potrójną:

$$F(T) = f. \tag{5}$$

Aby znaleźć podstawienia niezmieniające formy f, zważmy, że według (4) jest także:

$$f = F[(\Sigma)\, T] = F(\Sigma\, T);$$

ponieważ zaś

$$F = f(T^{-1})\,^{1)},$$

zatem

$$f = f(T^{-1}\Sigma\, T).$$

A więc podstawienia niezmieniające formy f (oznaczmy je przez S) mają kształt:

$$S = T^{-1}\Sigma\, T.$$

Używając wyrażenia znanego z teoryi grup, powiemy: podstawienia niezmieniające formy f, otrzymać można, przekształcając podstawienia niezmieniające formy F zapomocą podstawienia T. Zaznaczamy przytem wyraźnie, iż działania oznaczone ostatnim symbolem należy po sobie wykonywać w porządku od strony lewej ku prawej.

To ogólne postępowanie zastosujemy do formy potrójnej, nieoznaczonej kształtu:

$$f = q\,\xi^2 - s\,\eta^2 - r\,\zeta^2.$$

Dla uproszczenia rozumowania przyjmijmy nadal, że spółczynniki q, r, s są liczbami pierwszemi, z których co najwyżej dwie mogą być sobie równe.

Podstawienie T przekształcające formę F na formę f jest:

$$(6) \qquad T) \quad \begin{aligned} X &= \xi\sqrt{q} - \zeta\sqrt{r} \\ Y &= \eta\sqrt{s} \\ Z &= \xi\sqrt{q} + \zeta\sqrt{r}, \end{aligned}$$

---

[1]) Za pomocą symbolu T^{-1} oznaczam, jak zwykle, podstawienie odwrotne podstawieniu T.

podstawienie zaś temu odwrotne: T^{-1} ma kształt:

$$T^{-1})\qquad \begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2\sqrt{q}} X + \frac{1}{2\sqrt{q}} Z \\ \eta &= \frac{1}{\sqrt{s}} Y \\ \zeta &= -\frac{1}{2\sqrt{r}} X + \frac{1}{2\sqrt{r}} Z. \end{aligned}$$

Aby otrzymać podstawienie S, należy nam wykonać kolejno podstawienia T^{-1}, Σ, T; mieć będziemy:

$$T^{-1})\qquad \begin{aligned} \xi' &= \frac{1}{2\sqrt{q}} X' + \frac{1}{2\sqrt{q}} Y' \\ \eta' &= \frac{1}{\sqrt{s}} Y' \\ \zeta' &= -\frac{1}{2\sqrt{r}} X' + \frac{1}{2\sqrt{r}} Y'. \end{aligned}$$

Korzystając z równań (3), otrzymamy:

$$T^{-1}\Sigma)\qquad \begin{aligned} \xi' &= \frac{1}{2\sqrt{q}} (\delta^2+\beta^2) X + \frac{1}{\sqrt{q}} (\delta\gamma+\alpha\beta) Y + \frac{1}{2\sqrt{q}} (\alpha^2+\gamma^2) Z \\ \eta' &= \frac{1}{\sqrt{s}} \beta\delta X + \frac{1}{\sqrt{s}} (\alpha\delta+\beta\gamma) Y + \frac{1}{\sqrt{s}} \alpha\gamma Z \\ \zeta' &= \frac{1}{2\sqrt{r}} (\beta^2-\delta^2) X + \frac{1}{\sqrt{r}} (\alpha\beta-\gamma\delta) Y + \frac{1}{2\sqrt{r}} (\alpha^2-\gamma^2) Z. \end{aligned}$$

Wykonywając nakoniec podstawienie T, t. j. wprowadzając zamiast X, Y, Z wyrażenia (6), mieć będziemy ostatecznie podstawienie:

$$S)\qquad \begin{aligned} \xi' &= \tfrac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)\xi + \sqrt{\frac{s}{q}}\,(\alpha\beta+\gamma\delta)\eta + \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{q}}\,(\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-\delta^2)\zeta \\ \eta' &= \sqrt{\frac{q}{s}}\,(\alpha\gamma+\beta\delta)\,\xi + (\alpha\delta+\beta\gamma)\,\eta + \sqrt{\frac{r}{s}}\,(\alpha\gamma-\beta\delta)\,\zeta \\ \zeta' &= \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{q}{r}}\,(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2)\,\xi + \sqrt{\frac{s}{r}}\,(\alpha\beta-\gamma\delta)\eta + \tfrac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2)\zeta. \end{aligned}$$

Idzie nam, jak wspomnieliśmy, o podstawienia S, posiadające spółczynniki całkowite. Warunek ten prowadzi do następującego bliższego określenia liczb α, β, γ, δ. Oznaczmy dla krótkości spółczynniki podstawienia S przez a_{ik}; wtedy wyrażenia

$$a_{11}+a_{33}=\alpha^2+\delta^2, \qquad a_{11}-a_{33}=\gamma^2+\delta^2,$$

winny przedstawiać liczby całkowite[1]). Ponieważ nadto

$$a_{22}=\alpha\delta+\beta\gamma \quad \text{i} \quad \alpha\delta-\beta\gamma=1$$

są liczbami całkowitemi, więc także wyrażenia

$$\pm 2\alpha\delta \quad \text{i} \quad \pm 2\gamma\delta$$

przedstawiają liczby całkowite. Stąd wynika, iż

$$(\alpha\pm\delta)^2, \quad (\beta\pm\gamma)^2$$

są liczbami całkowitemi, a więc, że

$$\alpha+\delta=a\sqrt{m_1}, \quad \beta-\gamma=c\sqrt{n_1},$$
$$\alpha-\delta=b\sqrt{m_2}, \quad \beta+\gamma=d\sqrt{n_2},$$

gdzie a, b, c, d, m, n są liczbami całkowitemi. O liczbach m, n zakładamy jeszcze, iż one nie posiadają już czynników kwadratowych. Jeżeli nadto spólne czynniki liczb: m_1 i n_1, m_2 i n_2 oznaczymy odpowiednio przez π_1, π_2, to będziemy mogli liczby α, β, γ, δ napisać w kształcie:

$$(7) \quad \begin{aligned} \alpha &= \frac{a\sqrt{\mu_1}\sqrt{\pi_1}+b\sqrt{\mu_2}\sqrt{\pi_2}}{2} \\ \beta &= \frac{c\sqrt{\nu_1}\sqrt{\pi_1}+d\sqrt{\nu_2}\sqrt{\pi_2}}{2} \\ \gamma &= \frac{-c\sqrt{\nu_1}\sqrt{\pi_1}+d\sqrt{\nu_2}\sqrt{\pi_2}}{2} \\ \delta &= \frac{a\sqrt{\mu_1}\sqrt{\pi_1}-b\sqrt{\mu_2}\sqrt{\pi_2}}{2} \end{aligned}$$

gdzie już żadna para liczb: μ_1, ν_1, π_1 ani żadna para liczb: μ_2, ν_2, π_2 nie posiada spólnego czynnika. Dla wyznaczenia liczb μ, ν, π utwórzmy następujące wyrażenia, które zgodnie z naszem założeniem są liczbami całkowitemi:

$$\begin{aligned} -s\,a_{23}+r\,a_{32} &= \sqrt{rs}\,(\alpha+\delta)(\beta-\gamma)=ac\,\pi_1\sqrt{\mu_1\nu_1}\sqrt{rs}\,, \\ s\,a_{23}+r\,a_{32} &= \sqrt{rs}\,(\alpha-\delta)(\beta+\gamma)=bd\,\pi_2\sqrt{\mu_2\nu_2}\sqrt{rs}\,, \\ q\,a_{13}+r\,a_{31} &= \sqrt{qr}\,(\alpha+\delta)(\alpha-\delta)=aq\sqrt{\pi_1\pi_2}\sqrt{\mu_1\mu_2}\sqrt{qr}\,, \\ -q\,a_{13}+r\,a_{31} &= \sqrt{qr}\,(\beta+\gamma)(\beta-\gamma)=cd\sqrt{\pi_1\pi_2}\sqrt{\nu_1\nu_2}\sqrt{qr}\,. \end{aligned}$$

---

[1]) Por w wyżej przytoczonej pracy, Math. Ann. t. 39, str. 74—75.

Już z pierwszych dwu wyrażeń okazuje się, że liczby μ, ν zawierać mogą jako czynniki tylko liczby r i s, a więc że, stosownie do naszej umowy, liczby π_1 i π_2 tych czynników r, s nie zawierają. Pozostaje więc do rozważenia 16 różnych przypadków rozłożenia liczb r, s i q na liczby μ, ν i π. Lecz podstawiając zamiast μ, ν liczby r i s i ich kombinacye łatwo przekonamy się, że tylko następujące przypadki do sprzecznych nie prowadzą wniosków:

$$\begin{matrix} \mu_1 = 1, & \nu_1 = rs \\ \mu_2 = r, & \nu_2 = s \end{matrix} ; \quad \begin{matrix} \mu_1 = r & \nu_1 = s \\ \mu_2 = 1 & \nu_2 = rs \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} \mu_1 = s, & \nu_1 = r \\ \mu_2 = rs, & \nu_2 = 1 \end{matrix} ; \quad \begin{matrix} \mu_1 = rs & \nu_1 = 1 \\ \mu_2 = s & \nu_2 = r. \end{matrix} \tag{8}$$

W istocie, gdybyśmy n. p. przyjęli

$$\mu_1 = r, \ \nu_1 = s$$
$$\mu_2 = s, \ \nu_2 = r$$

otrzymalibyśmy jedno z wyżej przytoczonych wyrażeń:

$$q\, a_{13} + r\, a_{31} = a\, b\, r \sqrt{\pi_1\, \pi_2}\, \sqrt{q\, s}\,,$$

które, — z uwagi, iż liczby π_1, π_2 nie zawierają jako czynników liczb r i s, — nie może przedstawiać liczby całkowitej; i t. p.

Przy powyższych wartościach (8) liczb μ, ν liczby π_1, π_2 mogą posiadać tylko następujące kształty:

$$\pi_1 = \rho\, q, \ \pi_2 = \rho \quad \text{albo} \quad \pi_1 = \rho, \ \pi_2 = \rho\, q.$$

Aby ostatecznie znaleźć wartość liczby ρ skorzystamy ze związku: $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, t. j. odpowiednio do powyższych wartości liczb π ze związków:

$$\rho \left\{ q\,(a^2\, \mu_1 + c^2\, \nu_1) - (b^2\, \mu_2 + d^2\, \nu_2) \right\} = 4$$
$$\rho \left\{ a^2\, \mu_1 + c^2\, \nu_1 - q\, (b^2\, \mu_2 + d^2\, \nu_2) \right\} = 4.$$

Ponieważ lewe strony tych równań przedstawiają iloczyn dwu liczb całkowitych, wartość zaś $\rho = 4$, jako zupełny kwadrat, jest wykluczona, więc może być tylko:

$$\text{albo } \rho = 1, \text{ albo } \rho = 2,$$

tak, iż liczby π_1, π_2 posiadać mogą następujące pary wartości:

$$q, 1; \quad 1, q, \quad 2q, 2; \quad 2, 2q. \tag{9}$$

Uwzględniając wszystkie wartości (8) i (9) liczb μ, ν, π w wyrażeniach (7), otrzymamy 16 różnych pod względem formy typów podstawień

należących do grupy; mianowicie:

dla $\pi_1 = 1 \quad \pi_2 = q$:

$$U_1)\quad \begin{pmatrix} \dfrac{a+b\sqrt{qr}}{2} & \dfrac{c\sqrt{r}+d\sqrt{q}}{2}\sqrt{s} \\ \dfrac{-c\sqrt{r}+d\sqrt{q}}{2}\sqrt{s} & \dfrac{a-b\sqrt{qr}}{2} \end{pmatrix},$$

a) gdzie $a^2 - b^2 q r + c^2 r s - d^2 q s = 4$;

$$U_2)\quad \begin{pmatrix} \dfrac{a\sqrt{r}+b\sqrt{q}}{2}\sqrt{s} & \dfrac{c+d\sqrt{qr}}{2} \\ \dfrac{-c+d\sqrt{qr}}{2} & \dfrac{a\sqrt{r}-b\sqrt{q}}{2} \end{pmatrix},$$

b) gdzie $a^2 r s - b^2 q s + c^2 - d^2 q r = 4$;

$$U_3)\quad \begin{pmatrix} \dfrac{a\sqrt{r}+b\sqrt{q}}{2} & \dfrac{c+d\sqrt{qr}}{2}\sqrt{s} \\ \dfrac{-c+d\sqrt{qr}}{2}\sqrt{s} & \dfrac{a\sqrt{r}-b\sqrt{q}}{2} \end{pmatrix},$$

c) gdzie $a^2 r - b^2 q + c^2 s - d^2 q r s = 4$;

$$U_4)\quad \begin{pmatrix} \dfrac{a+b\sqrt{qr}}{2}\sqrt{s} & \dfrac{c\sqrt{r}+d\sqrt{q}}{2} \\ \dfrac{-c\sqrt{r}+d\sqrt{q}}{2} & \dfrac{a-b\sqrt{qr}}{2}\sqrt{s} \end{pmatrix},$$

d) gdzie $a^2 s - b^2 q r s + c^2 r - d^2 q = 4$.

Dla $\pi_1 = q$, $\pi_2 = 1$:

$$U_5)\quad \begin{pmatrix} \dfrac{a\sqrt{qr}+b}{2} & \dfrac{c\sqrt{q}+d\sqrt{r}}{2}\sqrt{s} \\ \dfrac{-c\sqrt{q}+d\sqrt{r}}{2}\sqrt{s} & \dfrac{a\sqrt{qr}-b}{2} \end{pmatrix},$$

e) gdzie $a^2 q r - b^2 + c^2 qs - d^2 rs = 4$;

$$U_6)\quad \begin{pmatrix} \dfrac{a\sqrt{q}+b\sqrt{r}}{2}\sqrt{s} & \dfrac{c\sqrt{qr}+d}{2} \\ \dfrac{-c\sqrt{qr}+b}{2} & \dfrac{a\sqrt{q}-b\sqrt{r}}{2}\sqrt{s} \end{pmatrix},$$

f) gdzie $a^2 q s - b^2 r s + c^2 q r - d^2 = 4$;

$$U_7)\quad \begin{pmatrix} \frac{a\sqrt{q}+b\sqrt{r}}{2} & \frac{c\sqrt{qr}+d}{2}\sqrt{s} \\ \frac{-c\sqrt{qr}+d}{2}\sqrt{s} & \frac{a\sqrt{q}-b\sqrt{r}}{2} \end{pmatrix},$$

$g)$ gdzie $a^2 q - b^2 r + c^2 q r s - d^2 s = 4$;

$$U_8)\quad \begin{pmatrix} \frac{a\sqrt{qr}+b}{2}\sqrt{s} & \frac{c\sqrt{q}+d\sqrt{r}}{2} \\ \frac{-c\sqrt{q}+d\sqrt{r}}{2} & \frac{a\sqrt{qr}-b}{2}\sqrt{s} \end{pmatrix},$$

$h)$ gdzie $a^2 q r s - b^2 s + c^2 q - d^2 r = 4$.

Pozostałe ośm typów odpowiadających wartościom $\pi_1 = 2$, $\pi_2 = 2q$; $\pi_1 = 2q$, $\pi_2 = 2$, które nazwiemy odpowiednio $V_1, V_2, \ldots, V_8$ posiadają tensam kształt co podstawienia powyżej wypisane z tą tylko różnicą, że w mianownikach spółczynników podstawień zamiast 2 zachodzi wszędzie $\sqrt{2}$; wskutek tego prawe strony odpowiednich równań $a), b) \ldots . h)$ są wszędzie równe 2. Grupę tę, obejmującą wszystkie 16 typów, nazywać będziemy stale $\Gamma^{(qrs)}$. Istnienie jej, oparliśmy na związku jej z grupą podstawień potrójnych form kwadratowych. Że jednak podstawienia tych 16 typów razem wzięte tworzą istotnie dla siebie grupę, t. j. że kombinując je z sobą nie otrzymamy podstawień posiadających jakiś kształt inny, niż jeden z owych szesnastu, — to będziemy mieli sposobność w jednym z następujących ustępów wprost sprawdzić.

Zauważymy jeszcze, że nie jest to grupa jedyna odpowiadająca formie $f = q\xi^2 - s\eta^2 - r\zeta^2$. Dla przejścia od formy f do formy $F = XZ - Y^2$ moglibyśmy równie dobrze użyć podstawienia:

$$T^1)\quad \begin{aligned} X &= \xi\sqrt{q} - \eta\sqrt{s} \\ Y &= \zeta\sqrt{r} \\ Z &= \xi\sqrt{q} + \eta\sqrt{s}. \end{aligned}$$

Używając zaś tego podstawienia i postępując zupełnie tak jak poprzednio dojdziemy do określenia grupy $\Gamma'^{(qrs)}$ zbudowanej zupełnie tak jak grupa $\Gamma^{(qrs)}$, którą otrzymać można wprost z grupy Γ, przemieniając w niej z sobą litery r i s. Przemianę tę liter uskutecznić także możemy, jak nie trudno sprawdzić, przekształcając podstawienia grupy $\Gamma^{(qrs)}$ zapomocą podstawienia:

$$K)\quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Własność tę wyrazimy zapomocą wzoru:

$$K^{-1}\,\Gamma^{(qrs)'}K = \Gamma'^{(qrs)}$$

i powiemy krótko: grupę $\Gamma'^{(qrs)}$ otrzymujemy z grupy $\Gamma^{(qrs)}$ przekształcając tę ostatnią zapomocą podstawienia K. Stąd wynika, że każdej grupie $\Gamma^{(qrs)}$ odpowiada jedna grupa $\Gamma'^{(qrs)}$. Widocznem jest jednak że zbiór wszystkich grup $\Gamma^{(qrs)}$, powstający przez nadawanie różnych wartości liczbom q, r, s, jest ten sam co zbiór grup $\Gamma'^{(qrs)}$ wziętych w innym porządku. Z tego powodu w następnych ustępach będziemy rozważali tylko grupy $\Gamma^{(qrs)}$, które dla krótkości nazywać także będziemy Γ.

Różnica ta między grupami $\Gamma^{(qrs)}$ i $\Gamma'^{(qrs)}$ znika oczywiście zupełnie w przypadku, gdy $s = r$, t. j. wówczas grupa $\Gamma^{(qrr)}$ ma tę własność, że przekształcona za pomocą podstawienia K nie zmienia się: $K^{-1}\,\Gamma^{(qrr)}\,K = \Gamma^{(qrr)}$. Ta własność prowadzi do następującego powiększenia grupy $\Gamma^{(qrr)}$. Jeżeli do podstawień grupy Γ dołączymy także podstawienie K, to otrzymamy grupę G obejmującą grupę Γ; grupę taką jak Γ objętą przez inną grupę (G) nazywamy grupą częściową (Untergruppe) grupy (G). — Zauważymy dalej, że podstawienia grupy Γ, nazwijmy je krótko A, przekształcone zapomocą podstawień: B grupy G, są znowu podstawieniami: A (grupy Γ), t. j. $B^{-1}\,A\,B = A'$.[1])

Jakoż, jeżeli $B = A$, to oczywiście $A^{-1}\,A'\,A^{+1} = A''$; jeżeli zaś $B = A'\,K$, to

$$B^{-1}\,A\,B = K^{-1}\,A'^{-1}\,A\,A'\,K = K^{-1}\,A''\,K = A'''$$

co było do okazania.

Rezultat ten przedstawimy symbolicznie: $B^{-1}\,\Gamma\,B = \Gamma$.

Grupę częściową posiadającą tę własność nazywamy grupą niezmienną[2]) (invariante Untergruppe). Nadto z tego rozważania okazuje się, że przy pomocy podstawienia tożsamościowego i podstawienia K można podstawienia B grupy G ułożyć w dwa szeregi, z których pierwszy zawiera tylko podstawienia grupy Γ:

$$\begin{array}{l} 1 \quad A, \quad A', \quad A'', \ldots \\ K, \; A\,K, \; A'\,K, \; A''\,K, \ldots \end{array}$$

Ilość takich szeregów stanowi wskaźnik grupy częściowej. Mamy więc twierdzenie: w przypadku $r = s$ grupa Γ jest niezmienną grupą częściową grupy G o wskaźniku równym 2.

---

[1]) Znaczki u góry oznaczają w ogóle mówiąc: różne podstawienia A.

[2]) Grupa taka częściowa nazywa się także grupą „wyszczególnioną“ (ausgezeichnete Untergruppe).

Jeszcze jedna uwaga tycząca się grupy G i $\Gamma^{(qr)}$. W przypadku tym podstawienia typów o wskaźnikach parzystych: $A_{2\alpha+2}$ ($\alpha=0, 1,..., 7$) przybierają tę samą postać (ze względu na wymierność), co podstawienia typów $A_{2\alpha+1}$ ($\alpha=0, 1,..., 7$), tak, iż ilość typów redukuje się do ośmiu. Lecz nawet nowe podstawienia, otrzymane przez dołączenie podstawienia K, nie wykazują nowych kształtów, tylko uzupełniają dawne tak, iż ośm tych typów grupy G możemy przedstawić następującym sposobem:

$$U_1)\quad \begin{pmatrix} \frac{a+b\sqrt{qr}}{2} & \frac{c+d\sqrt{qr}}{2} \\ \frac{-c+d\sqrt{qr}}{2} & \frac{a-b\sqrt{qr}}{2} \end{pmatrix}, \text{ gdzie } a^2-b^2qr+c^2-d^2qr=4,$$

. . . .

$$V_4)\quad \begin{pmatrix} \frac{a\sqrt{r}+b\sqrt{q}}{\sqrt{2}} & \frac{c\sqrt{r}+d\sqrt{q}}{\sqrt{2}} \\ \frac{-c\sqrt{r}+d\sqrt{q}}{\sqrt{2}} & \frac{a\sqrt{r}-b\sqrt{q}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \text{ gdzie } a^2r-b^2q+c^2r-d^2q=2.$$

Łatwo się to okaże, jeżli rzecz bliżej zważymy.

Zresztą jako dowód posłużyć może i ta okoliczność, że do takiego, jak powyższe, określenia grupy G dojdziemy powtarzając rozumowanie prowadzące do określenia grupy $\Gamma^{(q,r,s)}$ z tą tylko zmianą, iż przyjmiemy n. p.

$$\mu=\nu=1, \text{ albo } \mu=\nu=2 \text{ zaś } \pi_1=q, \ \pi_2=r \text{ albo } \pi_1=r, \ \pi_2=q.$$

§. 2. **Grupy uzupełnione.**

Dotąd z naszego rozważania wyłączaliśmy podstawienia rodzaju 2-go (których wyznacznik $=-1$). Jeżeli jednak będziemy chcieli także i te podstawienia uwzględnić, to dostrzeżemy, że gdy po prostu na podstawieniach grupy Γ (lub G) wykonamy podstawienie: $\omega'=-\bar{\omega}$, gdzie $\bar{\omega}=x-iy$, otrzymamy podstawienia o wyznaczniku równym -1. Dlaczego do tego celu nie używamy podstawienia n. p. $\omega'=-\omega$, uzasadnimy później, gdy będzie mowa o geometrycznem znaczeniu grupy. Zauważymy tu tylko, że podstawieniom rodzaju 2-go odpowiadają podstawienia (3) (§. 1), których wyznacznik: $-(\alpha\delta-\beta\gamma)^3=-1$, a podstawieniu $\omega'=-\bar{\omega}$ odpowiada podstawienie $X'=X$, $Y'=-Y$, $Z'=Z$, (którego wyznacznik $=-1$) tak, iż istotnie odpowiada ono jednemu z podstawień (3).

Dołączając do podstawień grupy Γ, podstawienie $\omega' = -\overline{\omega}$, otrzymamy grupę, którą nazywać będziemy grupą uzupełnioną (erweiterte Gruppe) i oznaczać ją będziemy przez literę $\overline{\Gamma}$. Grupa ta oczywiście obejmuje wszystkie podstawienia grupy Γ, a więc grupa Γ jest grupą częściową grupy $\overline{\Gamma}$. Nadto łatwo spostrzedz, że dwa podstawienia rodzaju 2-go z kolei po sobie wykonane prowadzą do podstawienia rodzaju 1-go; stąd w razie, jeżeli podstawienia rodzajów 1-go i 2-go nazwiemy odpowiednio A, $\overline{A}$, otrzymamy wzór:

$$\overline{A}^{-1} A \overline{A} = A',$$

a więc grupa Γ jest niezmienną grupą częściową grupy uzupełnionej $\overline{\Gamma}$. Wskaźnikiem tej grupy częściowej jest liczba 2. Jakoż podstawienia grupy $\overline{\Gamma}$ możemy przy pomocy podstawienia tożsamościowego i podstawienia $\omega' = -\overline{\omega}$ ułożyć w dwa szeregi:

$$A, \qquad A', \ldots .$$
$$\overline{A} = A\omega', \overline{A}' = A'\omega', \ldots .$$

Wszystko to stosuje się oczywiście także do grup G i $\overline{G}$.

§. 3. Rozkład grupy Γ; jej grupy częściowe.

Nie mamy zamiaru podawać tutaj wyczerpującego rozkładu grupy, lecz zajmiemy się tylko przypadkami najprostszymi.

Już sam kształt podstawień grupy Γ naprowadza na domysł, że między podstawieniami różnych typów istnieć będą jakieś związki. W istocie dostrzegamy naprzód, że podstawienie odwrotne względem podstawienia jakiegoś typu, należy do tegoż samego typu:

$$U_m^{-1} = U'_m .$$

Inne związki otrzymamy, jeżeli będziemy zważali kolejno na niewymierności: $\sqrt{s}$, $\sqrt{r}$, $\sqrt{q}$, $\sqrt{2}$, które w grupie zachodzą.

a) Jeżeli spółczynniki α, β, γ, δ podstawienia

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

nazwiemy odpowiednio spółczynnikiem pierwszym, drugim, itd., to widzimy, że w podstawieniach typów o wskaźnikach nieparzystych (zaliczmy je do jednej klasy), spółczynniki drugi i trzeci, — zaś w podstawieniach typów o wskaźnikach (parzystych tworzących klasę drugą), spółczynniki pierwszy i czwarty zawierają czynnik niewymierny: $\sqrt{s}$, tj.

$$A_{2\lambda+1})\quad \begin{pmatrix} A & B\sqrt{s} \\ C\sqrt{s} & D \end{pmatrix},\ \text{zaś}\ A_{2\lambda})\quad \begin{pmatrix} A'\sqrt{s} & B' \\ C' & D'\sqrt{s} \end{pmatrix},$$

gdzie $A, A' \ldots$ są liczbami zawierającemi tylko niewymierności $\sqrt{q}$, $\sqrt{r}$, $\sqrt{2}$. Wykonywając po sobie dwa podstawienia klasy 2-iej

$$A_{2\lambda})\ \begin{pmatrix} A'\sqrt{s} & B' \\ C' & D'\sqrt{s} \end{pmatrix};\qquad A_{2\mu})\ \begin{pmatrix} A'_1\sqrt{s} & B'_1 \\ C'_1 & D'_1\sqrt{s} \end{pmatrix},$$

otrzymamy:

$$A_{2\lambda}\, A_{2\mu})\ \begin{pmatrix} A'A'_1 s + B'C'_1, & (A'B'_1 + B'D'_1)\sqrt{s} \\ (C'A'_1 + D'C'_1)\sqrt{s}, & C'B'_1 + D'D'_1 s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'_2 & B'_2\sqrt{s} \\ C'_2\sqrt{s} & D'_2 \end{pmatrix}$$

Podobnie, wykonywając po sobie dwa podstawienia $A_{2\lambda+1}$, $A_{2\mu+1}$ dojdziemy do podstawienia:

$$A_{2\lambda+1} A_{2\mu+1})\ \begin{pmatrix} AA_1 + BC_1 s, & (AB_1 + BD_1)\sqrt{s} \\ (CA_1 + DC)\sqrt{s}, & CB_1 s + DD_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'_2 & B'_2\sqrt{s} \\ C'_2\sqrt{s} & D_2 \end{pmatrix}.$$

W obu więc razach otrzymujemy podstawienia, w których tylko spółczynniki trzeci i czwarty zawierają czynnik niewymierny $\sqrt{s}$, co właśnie jest cechą typów o wskaźnikach nieparzystych. Mamy zatem prawidło:

Wykonywając po sobie dwa podstawienia typów, których wskaźniki są oba albo liczbami parzystemi albo liczbami nieparzystemi, otrzymamy zawsze podstawienie należące do jednego z typów o wskaźniku nieparzystym:

$$A_{2\lambda+1} \cdot A_{2\mu+1} = A_{2\nu+1},\quad A_{2\lambda}\, A_{2\mu} = A'_{2\nu+1}.$$

b) Również ze względu na niewymierność: $\sqrt{r}$ można nasze 16 typów podzielić na dwie klasy, do jednej zaliczyć te, które mają kształt:

$$\begin{pmatrix} A + B\sqrt{r} & C\sqrt{r} + D \\ -C\sqrt{r} + D & A - B\sqrt{r} \end{pmatrix},$$

t. j. typy U_1, U_4, U_6, U_7, V_1, V_4, V_6, V_7; do klasy zaś drugiej zaliczyć typy pozostałe, mające kształt:

$$\begin{pmatrix} A\sqrt{r} + B & C + D\sqrt{r} \\ -C + D\sqrt{r} & A\sqrt{r} - B \end{pmatrix}.$$

Owóż, postępując podobnie jak poprzednio nietrudno sprawdzić, iż: wykonywając po sobie dwa podstawienia należące oba albo do klasy pierwszej, t. j. typów A_λ ($\lambda = 1, 4, 6, 7$), albo do klasy drugiej, t. j. do typów pozostałych ($\lambda = 2, 3, 5, 8$) otrzymamy zawsze podstawienia należące do typów klasy pierwszej.

$$A_\lambda A_\mu = A_\nu \quad \lambda, \mu = 1, 4, 6, 7 \text{ albo } 2, 3, 5, 8$$
$$\nu = 1, 4, 6, 7.$$

c) Zważając na niewymierność $\sqrt{q}$, dojdziemy, podobnie jak poprzednio, do rozróżnienia dwu kształtów podstawień:

$$\begin{pmatrix} A+B\sqrt{q} & C+D\sqrt{q} \\ -C+D\sqrt{q} & A-B\sqrt{q} \end{pmatrix} \text{ i } \begin{pmatrix} A\sqrt{q}+B & C\sqrt{q}+D \\ -C\sqrt{q}+D & A\sqrt{q}-B \end{pmatrix}$$

a więc do podziału typów także na dwie klasy: do pierwszej z nich zaliczymy typy podstawień A_λ dla $\lambda = 1, 2, 3, 4$, do drugiej typy, dla których $\lambda = 5, 6, 7, 8$ i powiemy: wykonywając po sobie dwa podstawienia należące albo oba do typów, których wskaźnik $\lambda = 1, 2, 3, 4$ albo oba do typów, których wskaźnik $\lambda = 5, 6, 7, 8$ otrzymamy zawsze podstawienie należące do typu, którego wskaźnik $\nu = 1, 2, 3, 4$:

$$A_\lambda A_\mu = A_\nu \quad \lambda, \mu = 1, 2, 3, 4 \text{ albo } 5, 6, 7, 8$$
$$\nu = 1, 2, 3, 4.$$

d) Dzieląc nakoniec ze względu na niewymierność $\sqrt{2}$ nasze typy na dwie klasy, wypadnie do klasy pierwszej zaliczyć podstawienia typów U; do klasy pozostałej podstawienia typów V i powiedzieć: wykonywając po sobie podstawienia należące albo oba do typów U albo oba do typów V otrzymamy zawsze podstawienie należące do typów U:

$$U_\lambda U_\mu = U_\nu, \quad V_\lambda V_\mu = U_\nu.$$

e) Z powyższych czterech prawideł wprost wynika, że: wykonywając po sobie dwa podstawienia należące do tegoż samego typu, zawsze otrzymamy podstawienie typu U_1:

$$A_\lambda A'_\lambda = A_1.$$

Stosując podane prawidła w dowolnym porządku, możemy otrzymywać rozmaite rozkłady grupy. Nie będziemy się zatrzymywali nad wyliczeniem i istotnem przeprowadzeniem wszystkich tych rozkładów, lecz jeden z nich podamy jako przykład.

Z prawidła *a*) wynika, iż wykonywając po sobie podstawienia należące do typów o wskaźnikach nieparzystych, nigdy nie otrzymamy podstawień należących do typów o wskaźnikach parzystych, t. z. że podstawienia typów o wskaźnikach nieparzystych tworzą dla siebie grupę, zawartą w grupie Γ, a więc grupę częściową grupy Γ. Nie można

tego powiedzieć o podstawieniach typów o wskaźnikach parzystych. Nadto ze wzorów pod *a*) podanych wynika:

$$A_{2\lambda+1}^{-1}\,A_{2\nu+1}\,A_{2\lambda+1}=A'_{2\nu+1},$$
$$A_{2\lambda}^{-1}A_{2\nu+1}\,A_{2\lambda}\quad=A''_{2\nu+1},$$

a więc nasza grupa częściowa jest grupą niezmienną w grupie ogólnej Γ. Wskaźnik grupy zależy, jak widzieliśmy, od ilości szeregów, w które można ugrupować podstawienia grupy ogólnej i z których jeden przedstawia właśnie naszą grupę częściową. W naszym przypadku zauważymy, że podstawienia typów o wskaźnikach parzystych, otrzymamy z podstawień typów o wskaźnikach nieparzystych, jeżeli na tych ostatnich wykonamy podstawienie:

$$L)\qquad \omega'=-\frac{1}{\omega}.$$

Widzimy zatem, że przy pomocy podstawień *1* i $-\frac{1}{\omega}$, (tworzących znowu dla siebie grupę skończoną), można ułożyć podstawienia grupy Γ w dwa szeregi, a więc wskaźnik grupy częściowej powyższej jest $=2$. Mamy zatem twierdzenie:

G r u p a obejmująca podstawienia typów o wskaźnikach nieparzystych jest grupą częściową, niezmienną grupy Γ i posiada względem niej wskaźnik 2. Nazwiemy ją Γ_2.

Stosując teraz n. p. twierdzenie *c*), widzimy, że w tej grupie częściowej jest znowu zawarta grupa składająca się z podstawień typów $U_{2\lambda+1}$. Nadto z *c*) wynika, że $V_{2\lambda+1}^{-1}\,U_{2\mu+1}\,V_{2\lambda+1}=U_{2\nu+1}$, a więc: podstawienia typów $U_{2\lambda+1}$ tworzą grupę częściową niezmienną tak grupy Γ_2 jak grupy Γ; jej wskaźnik względem grupy Γ jest $=4$; nazwiemy ją przeto Γ_4.

Ta znowu grupa (jak to z twierdzeń *a*) *c*) *d*) razem rozważanych wynika) obejmuje grupę częściową Γ_8, utworzoną przez podstawienia typów U_1, U_8 posiadającą wskaźnik 8 względem grupy Γ.

Nakoniec z twierdzeń *a*) *c*) *d*) *b*) razem wziętych (lub wprost z prawidła *c*) wynika, że podstawienia typu U_1 tworzą grupę częściową zawartą w grupie Γ_8 i tak względem tej, jak względem Γ niezmienną. Grupę tę nazwiemy Γ_{16}.

Jest to najmniejsza grupa częściowa, którąśmy na tej drodze mogli otrzymać.

Co się tyczy grup częściowych, posiadających taki sam wskaźnik α, otrzymywanych przy stosowaniu prawideł *a*) *b*) *c*) *d*) w innym po-

rządku zauważymy, że niektóre z nich będą sobie wprost równe, albo będą miały pewne grupy częściowe o wskaźniku $\beta > \alpha$ spólne, czyli, używając terminu znanego w teoryi grup, będą z sobą „spółmierne“ względem pewnych grup częściowych przez nie objętych. Lecz wszystkie takie grupy częściowe będą z sobą spółmierne względem grupy Γ_{16}.

Wspomnimy tu jeszcze o metodzie użytej przez Frickego [1]) w celu określenia grup (które, jak już we wstępie zaznaczyliśmy, są szczególnymi przypadkami grupy Γ); posłuży nam to zarazem za sprawdzenie że podstawienia 16-tu typów tworzą istotnie grupę.

Używając tej metody, należałoby postępować drogą odwrotną względem tej, której użyliśmy przy rozkładzie grupy. Wychodząc mianowicie z typu podstawień U_1, o których łatwo można się przekonać, że tworzą grupę (por. Fricke: Math. Ann. t. 39, str. 462, 463), dołączamy kolejno typy U_3, U_5 i U_7 itd., i dochodzimy stopniowo do coraz większych grup, aż wreszcie do grupy ogólnej Γ i grupy uzupełnionej $\overline{\Gamma}$. Co się tyczy szczegółowego przeprowadzenia rzeczy, odsyłamy czytelnika do prac Frickego.

Również choć kilka słów poświęcimy grupom częściowym analogicznym do grup częściowych rozważanych oddawna w teoryi grup modułowych, — których spółczynniki czynią zadość pewnym kongruencyom. Grupy te częściowe obejmują wszystkie te podstawienia grupy Γ, które odpowiadają podstawieniom potrójnym S posiadającym spółczynniki a_{ik} poddane następującym warunkom [2])

$$a_{11} \equiv a_{22} \equiv a_{33} \equiv 1 \text{ (mod. } n),$$
$$a_{12} \equiv a_{21} \equiv a_{13} \equiv a_{31} \equiv a_{23} \equiv a_{32} \equiv 0 \text{ (mod } n).$$

W przypadku, gdy n jest liczbą pierwszą, łatwo okazać, że wówczas

$$a^2 \mu_1 \pi_1 \equiv 4 \text{ (mod } n) \qquad b \equiv c \equiv d \equiv 0 \text{ (mod } n)$$

i podstawienia grupy Γ czyniące zadość tym warunkom tworzą częściową grupę niezmienną grupy Γ. Ponieważ jednak twierdzenia odnoszące się do tej grupy częściowej otrzymane przez Frickego [3]) z małemi stosownemi zmianami tutaj powtórzyćby można, więc ograniczamy się tylko do powyższej wzmianki.

---

[1]) Math. Ann. t. 38, str. 462 i n.; t. 39 str. 63 i n.

[2]) Poincaré: Les fonctions f. et l'a. Liouv. J. ser. 4, t. 3; str. 422.

[3]) Math. Ann. t. 39, str. 83 i n.

§. 4. Geometryczne znaczenie grup.

Aby uniknąć niejasności i powtarzania się w dalszym ciągu, przypominamy naprzód niektóre pojęcia, zresztą dobrze znane [1]) z teoryi geometrycznego przedstawiania grup.

Zmienną zespoloną ω, na której podstawienia wykonywamy, przedstawiamy, jak zwykle, jako punkt na płaszczyźnie lub na powierzchni kuli. Punkty ω', które otrzymujemy z pewnego danego punktu przy pomocy podstawień grupy, nazywają się punktami równoważnymi punktowi danemu względem grupy. Ponieważ podstawienia grupy posiadają spółczynniki rzeczywiste, wszystkie więc punkty równoważne znajdować się będą w tejże samej połowie płaszczyzny (po nad lub pod osią rzeczywistą), w polu której leży punkt dany. W przypadku grupy nieciągłej zawsze można znaleźć obszar skończony, obejmujący tylko punkty nierównoważne, i którego punkty obwodu są parami z sobą związane za pomocą podstawień grupy. Kształt tego obszaru, zwanego wielobokiem zasadniczym lub fundamentalnym, jest w wysokim stopniu dowolny; można jednak zawsze do tego doprowadzić, iż będzie on ograniczony wyłącznie łukami kół, których środki leżą na osi rzeczywistej [2]). Kształt zaś taki wieloboku jest z tego względu nadzwyczaj dogodny, że wówczas przy podstawieniach grupy przechodzi oś rzeczywista w siebie, koła zaś do niej prostopadłe przechodzą znowu w koła tęż samą własność posiadające. Wskutek tego wszystkie wieloboki otrzymywane z wieloboku zasadniczego przy pomocy podstawień grupy, czyli wszystkie „wieloboki równoważne wielobokowi zasadniczemu“ są także ograniczone łukami kół o środkach na osi rzeczywistej. Wieloboki te pokrywają całą połowę płaszczyzny raz jeden, nie pozostawiając miejsca pustego a nadto w przypadkach, którymi się zajmować będziemy, nie posiadają jako boków odcinków osi rzeczywistej tak, iż są zupełnie oddzielone od wieloboków powstających w drugiej połowie płaszczyzny. Z tego powodu rozważać będziemy wieloboki istniejące w jednej n. p. górnej połowie płaszczyzny.

Głównem zadaniem, które nam rozwiązać należy, jest znalezienie wieloboku zasadniczego. W tym celu rozważymy szczegółowiej naturę podstawień grupy.

Jak wiadomo dzielą się podstawienia liniowe

---

1) Por. Poincaré: Sur les groupes fuchsiennes: Act. Math. t. I str. 1 i n.
2) Act. Math. str. 16—20.

$$P)\quad \omega' = \frac{a\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta},$$

posiadające spółczynniki rzeczywiste, według Kleina[1]) na: *a*) Podstawienia eliptyczne, dla których bezw. wart. $(a+\delta) < 2$, posiadające dwa punkty stałe ω_1, ω_2 (Fixpunkte) z sobą sprzężone i od siebie różne:

$$\omega_{1,2} = \frac{(a-\delta) \pm \sqrt{(a+\delta)^2-4}}{2\gamma};$$

otrzymamy je, kładąc w powyższem podstawieniu $P)$ $\omega' = \omega$. Sprowadziwszy to podstawienie do postaci:

$$P)\frac{\omega'-\omega_1}{\omega'-\omega_2} = e^{\frac{2\pi i}{\varkappa}}\frac{\omega-\omega_1}{\omega-\omega_2},$$

widzimy, że $P^{\varkappa} = 1$; z tego powodu nazywamy $\varkappa$ peryodem podstawienia; $\varkappa$ jest głównym rozwiązaniem równania

$$e^{\frac{2\pi i}{\varkappa}}\frac{\alpha+\delta-\sqrt{(\alpha+\delta)^2-4}}{\alpha+\delta+\sqrt{(a+\delta)^2-4}}.$$

b) Podstawienia hyperboliczne, dla których $(a+\delta) > 2$ i których punkty stałe od siebie różne leżą na osi rzeczywistej.

c) Podstawienia paraboliczne, dla których $(a+\delta) = 2$, posiadające jeden punkt stały rzeczywisty.

Istnienie tych trzech rodzajów podstawień zależy oczywiście od liczb q, r, s. Zanim jednak przejdziemy do tego pytania, udowodnimy pewne twierdzenie, które nam rozwiązanie owego pytania znacznie ułatwi.

Jeżeli na zmiennej ω wykonamy dwukrotnie tożsamo podstawienie

$$P)\quad \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix},$$

otrzymamy podstawienie

$$P^2)\quad \begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha^2+\beta\gamma & \beta(\alpha+\delta)\\ \gamma(\alpha+\delta) & \beta\gamma+\delta^2\end{pmatrix}.$$

Stosownie do tego, czy $(\alpha+\delta)$ jest < 2, $= 2$ albo > 2 jest także

$$(\alpha'+\delta') = ((\alpha+\delta)^2-2) < 2,\ = 2,\ \text{albo} > 2.$$

Wyjątek stanowi tylko przypadek, kiedy $(\alpha+\delta) = 0$. Wówczas jednak podstawienie P, posiada peryod $\varkappa = 2$ i P^2 jest podstawieniem tożsamościowem $(P^2 = 1)$.

---

[1]) Klein: Vorl. ü. e. Modulf. str. 163 i n.

Z drugiej strony na mocy prawidła *e*) (§. 3) okazuje się, że powtarzając podstawienie należące do jakiegoś typu U_m, otrzymamy zawsze podstawienie należące do typu U_1: $U_m^2 = U_1$, a więc: wyjąwszy podstawienia eliptyczne, których peryod jest $=2$, powiemy: jeżeli w grupie zachodzi podstawienie któregoś z trzech powyższych rodzajów (elipt. hyp. lub parab.), to znajduje się napewno podstawienie tegoż rodzaju także między podstawieniami typu U_1.

Korzystając z tego twierdzenia, nie trudno nam będzie rozstrzygnąć, kiedy w grupie nie zachodzą podstawienia paraboliczne; dość bowiem jest rozważyć, kiedy podstawienia typu U_1 nie zawierają podstawień parabolicznych. Ponieważ dla tych podstawień jest $(\alpha+\delta)=2$, więc dla typu U_1

$$U_1)\quad \begin{pmatrix} \frac{a+b\sqrt{qr}}{2} & \frac{c\sqrt{r}+d\sqrt{q}}{2}\sqrt{s} \\ \frac{-c\sqrt{r}+d\sqrt{q}}{2} & \frac{a-b\sqrt{qr}}{2} \end{pmatrix},\ \text{gdzie } a^2-b^2qr+c^2rs-d^2qs=4.$$

jest $a=\pm 2$ i równanie ostatnie sprowadza się do równania:

$$qrb^2-rsc^2+qsd^2=0$$

czyli, gdy $b=b's$, $c=c'q$, $d=d'r$, do równania:

$$sb'^2-qc'^2+rd'^2=0,$$

które, w przypadku, gdy grupa zawiera podstawienia paraboliczne, winno posiadać rozwiązania w liczbach całkowitych. Stąd wynikają przy użyciu symbolu Legendre'a następujące równości [1])

$$\left(-\frac{rs}{q}\right)=\left(\frac{qr}{s}\right)=\left(\frac{qs}{r}\right)=1,$$

czyli

$$\left(\frac{q}{s}\right)=\left(\frac{r}{s}\right);\left(\frac{q}{r}\right)=\left(\frac{s}{r}\right),\left(\frac{-1}{q}\right)\left(\frac{r}{q}\right)=\left(\frac{s}{q}\right). \qquad (10)$$

Warunki te są z sobą sprzeczne w następujących przypadkach:

I) Kiedy q jest liczbą pierwszą kształtu $4h-1$, zaś r, s są liczbami pierwszemi kształtu $4k+1$.

Istotnie wówczas jest $\left(\frac{-1}{q}\right)=-1$, a więc

---

[1]) Vorl. über Zahlentheorie v. Lejeune-Dirichlet (Dedekind) III Aufl. str. 431.

(11) $$\left(\frac{r}{q}\right) = -\left(\frac{s}{q}\right);$$

z drugiej zaś strony, na mocy dwu pierwszych związków (10) i prawa „wzajemności" otrzymujemy:

$$\left(\frac{r}{q}\right) = \left(\frac{q}{r}\right) = \left(\frac{s}{r}\right) = \left(\frac{r}{s}\right) = \left(\frac{q}{s}\right) = \left(\frac{s}{q}\right),$$

t. j.
$$\left(\frac{r}{q}\right) = \left(\frac{s}{q}\right),$$

co jest z warunkiem (11) sprzeczne.

II) Podobnie postępując, okażemy, że do sprzecznych warunków dochodzi się, kiedy q jest liczbą pierwszą kształtu $4h+1$, a r i s są liczbami pierwszemi kształtu $4k-1$. Jakoż wówczas $\left(-\frac{1}{q}\right) = +1$ i ostatnia z równości (10) sprowadza się do:

(12) $$\left(\frac{r}{q}\right) = \left(\frac{s}{q}\right).$$

Z drugiej strony z prawa wzajemności i dwu pierwszych równości (10) wynika:

$$\left(\frac{r}{q}\right) = \left(\frac{q}{r}\right) = \left(\frac{s}{r}\right) = -\left(\frac{r}{s}\right) = -\left(\frac{q}{s}\right) = -\left(\frac{s}{q}\right)$$

a więc

$$\left(\frac{r}{q}\right) = -\left(\frac{s}{q}\right)$$

co jest z (12) sprzeczne. W tych tylko dwu przypadkach nie zawiera grupa Γ podstawień parabolicznych; w każdym zaś innym przypadku te podstawienia istotnie w grupie zachodzą. [Co do tych ostatnich grup zawierających podstawienia paraboliczne, okazał Fricke,[1]) iż one w pewien sposób przekształcone, wykazują spółmierność z grupą podstawień modułowych].

Nie tak łatwo jednak można rozstrzygnąć kiedy i o jakim peryodzie zawiera grupa Γ podstawienia eliptyczne. Co się tyczy podstawień o peryodzie k nieparzystym, to jak z prawidła e) (§. 3) wynika, zachodzić one mogą tylko między podstawieniami typu U_1. Nie możemy jednak tego powiedzieć o podstawieniach posiadających peryod parzysty; poszukiwania ich należy przeprowadzić dla każdego typu z osobna.

---

[1]) Math. Ann. t. 38 str. (79—81).

Przy ogólnym roztrząsaniu należałoby nam rozróżnić znaczną ilość przypadków, nadając liczbom q, r, s rozmaite wartości. Dlatego ograniczymy się tylko do pokazania sposobu postępowania, biorąc pod uwagę podstawienia typu U_1 dla powyższych przypadków I), II).

Ponieważ dla podstawień eliptycznych jest $(\alpha+\delta)<2$ a dla typu U_1:

$$\begin{pmatrix} \frac{a+b\sqrt{qr}}{2} & \frac{c\sqrt{r}+d\sqrt{q}}{2}\sqrt{s} \\ \frac{-c\sqrt{r}+d\sqrt{q}}{2}\sqrt{s} & \frac{a-b\sqrt{qr}}{2} \end{pmatrix}, \quad a^2-b^2qr+c^2rs-d^2qs=4$$

$\alpha+\delta=a$, gdzie a jest liczbą całkowitą, więc może być tylko albo $a=0$, albo $a=1$. Wartości te $(\alpha+\delta)=0,1$ odpowiadają podstawieniom eliptycznym posiadającym peryod odpowiednio $\varkappa=2$, $\varkappa=3$. Stąd widzimy, że w grupie Γ zachodzić mogą podstawienia eliptyczne, posiadające co najwyżej peryod $\varkappa=6$.

a) $a=0$, $\varkappa=2$. Równanie $a^2-b^2qr+c^2rs-d^2qs=4$ sprowadza się do:

$$-b^2qr+c^2rs-d^2qs=4.$$

Aby to równanie posiadało rozwiązania w liczbach całkowitych, potrzeba, z uwagi, iż b, c, d nie mogą zawierać czynników odpowiednio: s, q, r, aby:

$$b^2\equiv qr \pmod{s}\ ; \quad c^2\equiv rs \pmod{q}, \quad d^2\equiv -(qs) \pmod{r},$$

czyli:

$$\left(\frac{-1}{s}\right)\left(\frac{q}{s}\right)\left(\frac{r}{s}\right)=1;\ \left(\frac{r}{q}\right)\left(\frac{s}{q}\right)=1;\ \left(\frac{-1}{r}\right)\left(\frac{q}{r}\right)\left(\frac{s}{r}\right)=1.$$

1) Dla przypadku I): $q=4h-1$, a $r, s=4k+1$ mamy:

$$\left(\frac{-1}{q}\right)=-1;\ \left(\frac{-1}{r}\right)=\left(\frac{-1}{s}\right)=1, \text{ a więc}$$

$$\left(\frac{q}{s}\right)=\left(\frac{r}{s}\right), \left(\frac{r}{q}\right)=\left(\frac{s}{q}\right), \left(\frac{q}{r}\right)=\left(\frac{s}{r}\right),$$

co jest zawsze możliwe.

2) Dla przypadku jednak II): $q=4h+1$; $r, s=4k-1$, mamy

$$\left(\frac{-1}{q}\right)=+1,\ \left(\frac{-1}{r}\right)=\left(\frac{-1}{s}\right)=-1,$$

a więc

$$\left(\frac{q}{s}\right)=-\left(\frac{r}{s}\right),\ \left(\frac{r}{q}\right)=\left(\frac{s}{q}\right),\ \left(\frac{q}{r}\right)=-\left(\frac{s}{r}\right).$$

Lecz na mocy prawa wzajemności i n. p. dwu ostatnich związków, otrzymujemy:

$$\left(\frac{q}{s}\right)=\left(\frac{s}{q}\right)=\left(\frac{r}{q}\right)=\left(\frac{q}{r}\right)=-\left(\frac{s}{r}\right)=+\left(\frac{r}{s}\right)$$

t. j.

$$\left(\frac{q}{s}\right)=+\left(\frac{r}{s}\right)$$

co jest sprzeczne ze związkiem pierwszym. W tym więc przypadku nie zachodzą w grupie Γ podstawienia eliptyczne o peryodzie $\varkappa=2$ należące do typu U_1, a więc także w ogóle nie zachodzą podstawienia posiadające peryod $\varkappa=4$.

b) $a=1$; $\varkappa=3$. Tutaj równanie $a^2-bqr+c^2rs-d^2qs=4$ sprowadza się do równania:

$$-b^2rq+c^2rs-d^2qs=3.$$

Aby to równanie miało rozwiązania w liczbach całkowitych potrzeba, aby

$$\left(\frac{3}{q}\right)\left(\frac{r}{q}\right)=\left(\frac{s}{q}\right);\ \left(\frac{-1}{r}\right)\left(\frac{3}{r}\right)=\left(\frac{q}{r}\right)\left(\frac{s}{r}\right),\ \left(\frac{-1}{s}\right)\left(\frac{3}{s}\right)=\left(\frac{q}{s}\right)\left(\frac{r}{s}\right),$$

co jednak już prowadzi do znacznej ilości przypadków. Nie będziemy ich tu przytaczali, jak również nie będziemy rozważali podstawień hyperbolicznych w grupie, gdyż nam to do zamierzonego celu nie jest potrzebne, a z drugiej strony taką dyskusyę przy danych liczbach q, r, s nie trudno jest przeprowadzić.

Tyle co do podstawień grupy Γ. Pozostaje nam jeszcze pomówić o podstawieniach grupy uzupełnionej $\overline{\Gamma}$. Powiedzieliśmy wyżej, że podstawienia rodzaju 2-go (posiadające wyznacznik $=-1$) otrzymamy z podstawień rodzaju 1-go, gdy na nich wykonamy podstawienie $\omega'=\overline{\omega}$.

Geometrycznie podstawienie to oznacza przejście od punktu ω do punktu symetrycznie położonego względem osi urojonej. Jasnem jest teraz, dlaczegośmy uzupełnili grupę Γ zapomocą podstawienia właśnie: $-\overline{\omega}$; tym sposobem bowiem także przy uwzględnieniu tego podstawienia nie wychodzimy poza obręb górnej połowy płaszczyzny.

Z pomiędzy podstawień grupy Γ, najważniejszemi dla nas będą te, których peryod jest równy 2, a więc do których, jak łatwo spostrzedz, należy także podstawienie $-\overline{\omega}$.

Cechę charakterystyczną tych podstawień stanowi warunek [1]) $\alpha=\delta$

---

[1]) Zob. Vorl. ü. e. Modulf. str. 196 i n.

a więc dla podstawień naszych typów warunek $b = 0$. Punkty stałe takiego podstawienia tworzą koło prostopadłe do osi rzeczywistej, którego równaniem jest:

$$\gamma (x^2 + y^2) - 2 \alpha x + \beta = 0,$$

gdy $x + i y = \omega$. Koła te oznaczać będziemy stale literą K.

Dla podstawienia $\omega' = -\bar{\omega}$ kołem K jest oś urojona a punkty sobie równoważne względem tego podstawienia, są, jak widzieliśmy, punkty symetryczne względem osi urojonej. Z tego powodu będziemy mówili w ogóle, że punkty sobie równoważne względem podstawień rodzaju 2-go, posiadających peryod $= 2$, są punktami symetrycznymi względem odpowiednich (t. j. do tychże podstawień należących) kół K.

Koła te K okażą się w dalszym ciągu nadzwyczaj przydatnemi do wyznaczenia wieloboku zasadniczego. Z tego powodu w każdym szczególnym przypadku będziemy musieli ocenić, które typy biorą udział w powyższych podstawieniach rodzaju 2-go o peryodzie $= 2$, co ze względu, że $b = 0$, nie sprawia wielkich trudności.

Rzecz tę okażemy na przykładach; teraz zaś jeszcze kilka słów o wieloboku zasadniczym grupy $\bar{\Gamma}$. Ponieważ dwa podstawienia rodzaju 2-go po sobie wykonane prowadzą zawsze do podstawienia rodzaju 1-go, więc dwa wieloboki zasadnicze grupy $\bar{\Gamma}$ (sobie przyległe) tworzą wielobok zasadniczy grupy Γ. Do linij ograniczających wielobok grupy $\bar{\Gamma}$ należeć będą oczywiście także koła K, jako linie sobie samym względem grupy równoważne. Stąd widocznem jest, że wielobok zasadniczy grupy $\bar{\Gamma}$ otrzymamy, dzieląc wielobok zasadniczy grupy Γ za pomocą odpowiedniego koła K na dwie części symetryczne z sobą względem tego koła.

Mamy już teraz wszystko przygotowane, aby uskutecznić ograniczenie wieloboku zasadniczego grupy Γ i $\bar{\Gamma}$ lub, co więcej, podzielić całą połowę płaszczyzny na wieloboki równoważne zasadniczemu.

Wszystkie punkty stałe podstawień eliptycznych lub parabolicznych, jako punkty sobie samym równoważne względem pewnych podstawień grupy Γ leżą na obwodzie wieloboku i tworzą, w ogóle mówiąc, jego wierzchołki. Aby więc uzyskać żądany podział płaszczyzny dla grupy Γ, należy przez odpowiednie pary tych punktów poprowadzić koła prostopadłe do osi rzeczywistej.

Podział ten jednak łatwiej otrzymamy, wychodząc z grupy uzupełnionej $\bar{\Gamma}$ i jej wieloboków. W tym celu kreślimy wszystkie koła K, które ograniczą pewne wieloboki. Punkty przecięcia tych kół K, jako punkty odpowiadające sobie także względem grupy Γ, są punktami stałymi podstawień eliptycznych (lub parabolicznych). Ilość kół K prze-

chodzących przez ów punkt stały podstawienia zależy od tegoż peryodu i oczywiście tworzą te koła z sobą kąty równe. Zauważyć jednak należy, że na odwrót niewszystkie punkty stałe podstawień eliptycznych powstają wskutek przecięcia się kół K. Może się mianowicie zdarzyć, na co zwrócił uwagę Fricke i do czego podał przykłady[1]), że wielobok ograniczony samemi kołami K nie jest wielobokiem zasadniczym grupy $\overline{\Gamma}$, ale należy do grupy niezmiennej $\overline{\Gamma}_\nu$, częściowej względem grupy $\overline{\Gamma}$. Wówczas w polu takiego wieloboku znajdzie się punkt stały podstawienia eliptycznego; przezeń oraz przez odpowiednie wierzchołki wieloboku potrzeba poprowadzić koła, które nam zeń oddzielą wielobok zasadniczy grupy $\overline{\Gamma}$.

Stąd, że dwa wieloboki zasadnicze grupy $\overline{\Gamma}$ sobie symetryczne względem jakiegoś koła K tworzą wielobok zasadniczy grupy Γ, wprost okazuje się, iż te boki wieloboku grupy Γ są sobie względem niej równoważne, które leżą symetrycznie względem koła K dzielącego wielobok. — Podstawienia, przy których boki wieloboku przechodzą w im równoważne nazywają się podstawieniami rodzącemi grupy; one bowiem wystarczają do określenia całej grupy. Znając kształt wieloboku zasadniczego i wiedząc, które boki są sobie parami równoważne, nie trudno jest w każdym szczególnym przypadku, biorąc do pomocy na bokach dwie pary punktów (np. wierzchołków) sobie równoważnych, znaleźć podstawienia rodzące.

Wycinając wielobok zasadniczy grupy Γ z płaszczyzny i składając go tak (w myśl geometryi położenia), aby boki sobie równoważne z sobą się zeszły, otrzymamy pewną powierzchnię zamkniętą. Ponieważ pary boków równoważnych są z sobą symetryczne względem pewnego koła K, powierzchnia owa posiada tę własność, iż się rozpada na dwie części, jeżeli ją przetniemy wzdłuż jakiejkolwiek na niej leżącej linii zamkniętej, siebie niespotykającej. Własność ta cechuje, jak wiadomo, powierzchnie należące do rodzaju (*Geschlecht*): $p = 0$. Stąd mówimy, iż grupy Γ należą do rodzaju zero.

Chcąc wreszcie znaleźć wielobok zasadniczy grupy częściowej Γ_ν grupy Γ postępujemy w ten sposób [2]). Wychodząc z któregoś wieloboku zasadniczego grupy Γ, dołączamy doń wieloboki jemu przyległe dotąd, dopóki nie natrafimy na wielobok równoważny (względem grupy Γ_ν) jednemu z poprzednio już wziętych wieloboków. Ile takich wieloboków

---

[1]) Mat. Ann. t. 38, str. 72, 474 i n.; t. 39, str. 69 i n.

[2]) Zob. Vorl. u. e. Modulf. str. 310.

grupy Γ składa wielobok grupy częściowej, wskazuje jej wskaźnik. Tym sposobem postępując nie trudno rozstrzygnąć, które boki wieloboku grupy Γ_ν są sobie względem niej równoważne, a więc także znaleźć podstawienia rodzące grupy częściowej.

§. 5. **Formy podwójne kwadratowe.**

Chociaż w kilku słowach wypada zaznaczyć związek istniejący między grupą Γ a formami kwadratowemi podwójnemi, których spółczynniki należą do obszaru wymierności $\sqrt{q}$, $\sqrt{r}$, $\sqrt{s}$. Formy te (oznaczam je literą φ) mają kształt:

$$\varphi = (\xi\sqrt{q} - \zeta\sqrt{r})x^2 + 2\eta\sqrt{s}\,xy + (\xi\sqrt{q} + \zeta\sqrt{r})y^2,$$

gdzie liczby ξ, η, ζ są liczbami całkowitemi w zwykłem tego słowa znaczeniu. Związek, o którym mowa, przeprowadził dla szczególnych przypadków grupy Γ Fricke [1]) w myśl rozwinięć Kleina przeprowadzonych dla zwykłych form kwadratowych i grupy funkcyj modułowych [2]). Na mocy tego związku wypadają nadzwyczaj proste i jasne odpowiedzi na zwykłe pytania, które sobie w teoryi tych form zadajemy: *a)* kiedy dwie formy posiadające ten sam wyznacznik są sobie równoważne — i *b)* znaleźć podstawienia, przy których forma przechodzi w jej równoważną. Nie chcąc przytaczać wywodów nieróżniących się wielce od tych, które są zamieszczone w pismach dopieroco wymienionych ujmiemy całą rzecz w szereg twierdzeń.

A) Wyznacznik formy φ jest mniejszy od zera:

$$D = q\xi^2 - s\eta^2 - r\zeta^2 < 0.$$

Formę φ posiadającą wyznacznik $D < 0$, przedstawiamy na płaszczyźnie zmiennej zespolonej ω zapomocą punktu:

$$\frac{-\eta\sqrt{s} + i\sqrt{-D}}{\xi\sqrt{q} + \zeta\sqrt{r}}.$$

Wówczas formy φ, φ_1 . . . , przedstawione zapomocą punktów sobie równoważnych względem grupy Γ, są formami sobie równoważnemi. Obierając jeden z wieloboków zasadniczych grupy Γ — nazwijmy go

[1]) Math. Ann. t. 39, str. 73 i n.

[2]) Vorl. ü. e. Modulf. str. 243.

W_1 — za pierwszy (wielobok wyjścia), i przyjmując, że formy przedstawione przez punkty tego wieloboku są formami zredukowanemi, powiemy: Każda forma φ o wyznaczniku ujemnym jest równoważna jednej formie zredukowanej. Formy φ_1, z wyjątkiem tych, które są przedstawione zapomocą punktów przypadających w punktach stałych podstawień eliptycznych, nie zmieniają się tylko przy podstawieniu tożsamościowem; formy zaś owe wyjątkowe pozostają bez zmiany przy tylu podstawieniach (eliptycznych) ile wynosi peryod tego podstawienia eliptycznego, którego punkt stały przedstawia formę. Punkty przedstawiające formy φ, które są sobie równoważne także względem podstawień rodzaju 2-go, leżą na kołach K.

B) Wyznacznik formy: $D > 0$.

Formę φ o wyznaczniku $D > 0$ przedstawiamy zapomocą koła K prostopadłego do osi rzeczywistej przechodzącego przez punkty:

$$\frac{-\eta\sqrt{s}+\sqrt{D}}{\xi\sqrt{q}+\xi\sqrt{r}}, \quad \frac{-\eta\sqrt{s}-\sqrt{D}}{\xi\sqrt{q}+\xi\sqrt{s}},$$

i opatrzonego strzałką, która stanowi różnicę miedzy formami φ i $-\varphi$. Formę φ_1 równoważną formie φ przedstawia koło K_1, które otrzymamy z koła K przy pomocy podstawienia grupy Γ. Formą zredukowaną nazywa się ta, której koło K przechodzi przez wielobok W_1. Stąd: Każda forma jest przynajmniej jednej formie zredukowanej równoważna. Podstawienia (rodzaju 1-go) grupy Γ niezmieniające tych form są podstawieniami hyperbolicznemi i tworzą grupę nieskończoną cykliczną. — Formy przedstawione przez koła K posiadają nadto następujące własności: a) są sobie także równoważne względem odpowiedniego podstawienia rodzaju 2-go, przy którem koło K przechodzi w siebie; b) zmieniają tylko swój znak przy podstawieniach eliptycznych, posiadających peryod 2, których punkty stałe leżą na kole K.

Wszystkie te warunki i własności, wypowiedziane w formie geometrycznej, można łatwo, dobierając odpowiednio W_1, przedstawić w zwykłej formie algebraicznej.

Zauważymy tu jeszcze, że obok form φ posiadają ten sam wyznacznik $D = f$ także formy kształtu:

$$\varphi' = (\xi\sqrt{q}-\eta\sqrt{s})x^2 + 2\zeta\sqrt{r}\,xy + (\zeta\sqrt{q}+\zeta\sqrt{r}).$$

Zachodzi więc pytanie, jaka grupa podstawień należy do tych form? Zważmy naprzód, że podstawieniem, które przekształca formę φ we formę φ' jest

$$K)\quad \begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'. \end{aligned}$$

Grupa więc podstawień należąca do form φ' jest grupą powstającą wskutek przekształcenia grupy Γ zapomocą podstawienia K, t. j. grupą, którąśmy w § 1-ym nazwali Γ'. Z powyższego nadto wprost wynika, że podstawieniami przekształcającemi formy k s z t a ł t u φ we formy k s z t a ł t u φ' są podstawienia: AK, jeżeli przez A, jak zwykle, oznaczymy podstawienia grupy Γ.

PRZYKŁADY.

I) Niech:

$$q=1, \quad r=3, \quad s=7;$$

ilość typów sprowadza się do ośmiu: U_1, U_2, U_3, U_4, V_1, V_2, V_3, V_4. Według powyżej wyłożonej teoryi szukać naprzód będziemy kół K. Podstawienia, które je wyznaczają, są określone przez to, że $b=0$. Nie trudno okazać, że tylko dla podstawienia typów: U_1, U_2, U_4, V_1, V_4 istnieją koła K. Jakoż n. p. dla typu U_3 równanie *c)* §. 1) sprowadza się do równania

$$3a^2 + 7c^2 - 21d^2 = 4,$$

które nie posiada rozwiązań w liczbach całkowitych, gdyż w takim razie winno być $a^2 \equiv 3 \bmod 7$, zaś $(\frac{3}{7}) = -1$; podobnie okazać to można dla typów V_2, V_3. Równania zaś typów pozostałych sprowadzają się do równań następujących[1]:

U_1) $a^2+21c^2-7d^2=4$; $a=\pm 2$, $c=0$, $d=0$;
U_2) $21a^2+c^2-3d^2=4$; $a=0$, $c=\pm 2$, $d=0$; $a=0$, $c=4$, $d=2$;
U_4) $7a^2+3c^2-d^2=4$; $a=\pm 2$, $c=\pm 2$, $d=\pm 6$; $a=\pm 2$, $c=\pm 10$, $d=\pm 18$;
V_1) $a^2+21c^2-7d^2=2$; $a=\pm 3$, $c=0$, $d=\pm 1$; $a=\pm 3$, $c=\pm 1$, $d=\pm 2$;
V_4) $7a^2+3c^2-d^2=2$; $a=0$, $c=\pm 1$, $d=\pm 1$; $a=\pm 3$, $c=\pm 1$, $d=\pm 8$.

[1]) Niektóre z rozwiązań tych równań obok wypisuję.

Tym rozwiązaniom odpowiadają koła K: $x = 0$; $x^2 + y^2 = 1$; $x^2 + y^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$; i t. d. Jak widać z fig. 1-ej koła te ograniczają pięcioboki posiadające same kąty proste [1]).

Z kolei zachodzi pytanie jakiego rodzaju podstawienia eliptyczne zachodzą w grupie. Ponieważ dla tych podstawień suma pierwszego i ostatniego spółczynnika $(\alpha+\delta)<2$ więc dla typu U_1 jest $(\alpha+\delta)=a=0$, albo $=1$; dla typu U_3: $(\alpha+\delta)=0$, $\sqrt{3}$, a więc $a=0$, 1; dla typu V_1 : $(\alpha+\delta)=0$ lub $\sqrt{2}$ a więc $a=0$, 1; dla reszty zaś typów tylko: $(\alpha+\delta)=0$, a więc $a=0$. Szukając rozwiązań równań, do których się przy powyższych wartościach liczby a sprowadzą odpowiednie równania $a)$ $b)$ . . (§. 1), przekonamy się, że tylko podstawienia typów U_2, V_1, V_2, V_4 mogą być podstawieniami eliptycznemi i wszystkie posiadają peryod równy 2. Podajemy tu dla każdego typu podstawienia eliptyczne z ich punktami stałymi:

$$U_2)\quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \omega_{1,2}=\pm i,$$

$$V_1)\quad \begin{pmatrix} \sqrt{6} & \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\sqrt{7} \\ \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\sqrt{7} & -\sqrt{6} \end{pmatrix}; \qquad \omega_{1,2}=\frac{2\sqrt{3}\pm i\sqrt{2}}{\sqrt{7}\,(\sqrt{3}-1)},$$

$$V_2\quad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}; \qquad \omega_{1,2}=\frac{\sqrt{7}\pm i\sqrt{2}}{3},$$

$$V_4)\quad \begin{pmatrix} 0 & \frac{-\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}; \qquad \omega_{1,2}=\pm\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,i;$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{2}} & \frac{-3\sqrt{3}-2}{\sqrt{2}} \\ \frac{+3\sqrt{3}-2}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}; \qquad \omega_{1,2}=\frac{\sqrt{21}\pm i\sqrt{2}}{3\sqrt{3}-2}.$$

---

[1]) Wieloboki zasadnicze grupy Γ są naprzemian cieniowane i niecieniowane.

Wszystkie te punkty stałe leżą we wierzchołkach wieloboku utworzonego przez koła K. Mamy więc wynik następujący:

Wielobokiem zasadniczym grupy $\overline{\Gamma}^{(1,3,7)}$ jest pięciobok posiadający wszystkie kąty proste. Dołączając do niego jeden z wieloboków przyległych, otrzymujemy sześciobok, który jest wielobokiem zasadniczym grupy $\Gamma^{(1,3,7)}$.

Z sześcioboku $(a\,b\,c\,d\,e\,f\,h)$ (fig. 1) odczytujemy następujące podstawienia rodzące:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \sqrt{7} & -\sqrt{3}-3 \\ \sqrt{3}-3 & \sqrt{7} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

II) Przyjmijmy:

$$q = 1, \ r = 7, \ s = 3,$$

podobnie jak w przykładzie poprzedzającym, ilość typów zredukuje się do ośmiu. Koła K należą do podstawień typów:

$$\begin{array}{lll} U_1) & a^2 + 21c^2 - 3d^2 = 4; & a = \pm 2, \ c = 0, \ d = 0; \\ U_2) & 21a^2 + c^2 - 7d^2 = 4; & a = 0, \ c = \pm 2, \ d = 0; \\ U_4) & 3a^2 + 7c^2 - d^2 = 4; & a = \pm 2, \ c = \pm 2, \ d = \pm 6; \\ V_2) & 21a^2 + c^2 - 7d^2 = 2; & a = 0, \ c = \pm 3, \ d = \pm 1; \\ V_4) & 3a^2 + 7c^2 - d^2 = 2; & a = \pm 1, \ c = 0, \ d = \pm 1. \end{array}$$

Koła te, jak widać z fig. 2-ej, dzielą płaszczyznę na pięcioboki prostokątne. Z podstawień eliptycznych zachodzą w grupie tylko te, których peryod $= 2$ i w nich biorą udział podstawienia typów: U_2, V_1, V_2, V_3. Punkty stałe tych podstawień leżą w wierzchołkach pięcioboku, tak iż mamy twierdzenie:

Wielobokiem zasadniczym grupy $\overline{\Gamma}^{(1,7,3)}$ jest pięciobok posiadający wszystkie kąty proste. Dołączając do niego jeden z wieloboków przyległych otrzymamy sześciobok będący wielobokiem zasadniczym grupy $\Gamma^{(1,7,3)}$. Podstawienia rodzące tej grupy są:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & \frac{-3-\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \\ \frac{3-\sqrt{7}}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{7}-3 \\ -\sqrt{7}-3 & \sqrt{3} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

III) Niech nakoniec:

$$q = 3, \; r = s = 5.$$

Koła K należą do podstawień typów:

U_1) $a^2 + c^2 - 15d^2 = 4$; $a \pm 2, \; c = 0, \; d = 0$;
U_3) $15a^2 + c^2 - d^2 = 4$; $a = 0, \; c = \pm 2, \; d = 0$;
U_4) $3a^2 + 3c^2 - 5d^2 = 4$; $a = \pm 2, \; c = \pm 2, \; d = \pm 2$;
V_1) $a^2 + c^2 - 15d^2 = 2$; $a = \pm 1, \; c = \pm 1, \; d = 0$;
V_2) $5a^2 + 5c^2 - 3d^2 = 2$; $a = \pm 1, \; c = 0, \; d = 1; \; a = 0, \; c = \pm 1, \; d = \pm 1$;

Koła te ograniczają czworobok wskazany figurą 3-cią, w którym trzy kąty są proste, czwarty połową prostego. Postępując podobnie jak w poprzednich przykładach przekonamy się, że w grupie G zachodzą podstawienia eliptyczne o peryodach $= 2$ i 4, oraz że punkty stałe tych podstawień leżą w wierzchołkach wieloboków ograniczonych kołami K. Wielobok więc grupy $\overline{G}$ jest właśnie powyższym czworobokiem, wielobokiem zaś grupy G będzie pięciobok powstały przez dołączenie do poprzedniego jednego z wieloboków przyległych. Podstawienia rodzące są:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -3-\sqrt{5} \\ -3+\sqrt{5} & \sqrt{3} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

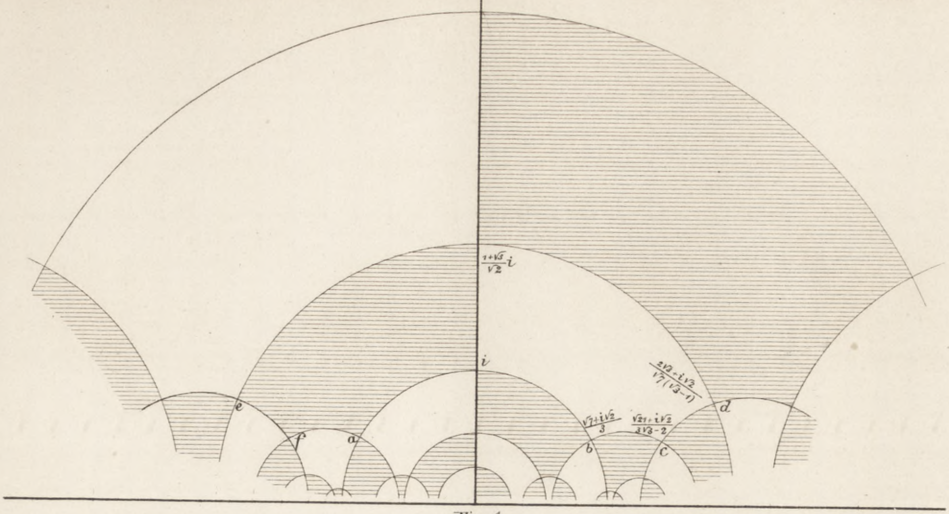


Fig. 1.

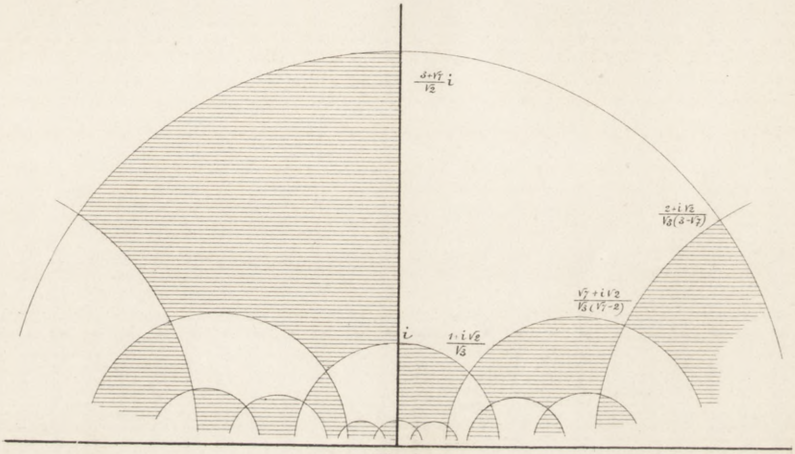


Fig 2.

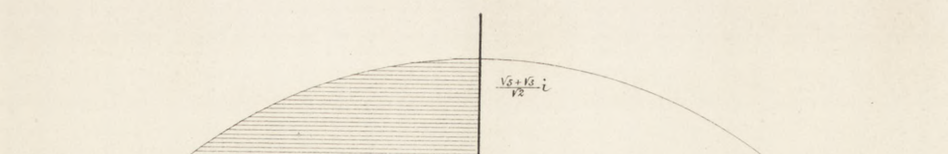


Fig. 3.

Autor S. Kępiński

Litogr. M. Salba w Krakowie.